XXV Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.



Новое доказательство трансцендентности чиселъ π и e.

(Доказательство Θ. Валена).

Прив.-Доцента В. Кагана въ Одессѣ.

(Продолженіе.)*

Теперь мы можемъ изложить доказательство Θ. Валена. Мы начнемъ съ доказательства трансцендентности числа e. Именно — намъ нужно обнаружить невозможность равенства вида

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ . \ . \ . + a_n e^n = 0,$$

гдѣ a_0, a_1 . . . a_n суть цѣлыя числа, между которыми имѣются отличныя отъ нуля. Подобно тому, какъ это еще дѣлалъ Эрмитъ, (см. стр. 230) мы поставимъ вопросъ шире: мы докажемъ, что равенство вида

$$Ae^a + Be^b + Ce^c \ . \ . \ . \ Le^l + M = 0$$

невозможно, если показатели a, b, c, . . l суть различныя цѣлыя положительныя числа, а коэффиціенты A, B, . . . L, M цѣлыя числа, изъ которыхъ не всѣ равны нулю. Даже больше, мы можемъ считать

*) См. № 287 „Вѣстника".

всѣ показатели и *всѣ* коэффиціенты отличными отъ нуля. Это значитъ, члены, въ которыхъ коэффиціенты равны нулю, мы можемъ считать вовсе опущенными; члены же, въ которыхъ обращается въ нуль показатель, мы присоединимъ къ свободному члену M; вопросъ еще въ томъ, не обратится ли въ нуль именно этотъ свободный членъ. Если бы это произошло и Le^l былъ бы тотъ изъ сохранившихся членовъ, который имѣетъ наименьшій показатель при e, то намъ достаточно было бы раздѣлить обѣ части равенства на e^l, чтобы возстановить свободный членъ. Итакъ доказательству подлежитъ слѣдующая теорема:

Теорема. Равенство вида

$$Ae^a + Be^b + Ce^c + \ldots\; Le^l + M = 0 \qquad (17).$$

невозможно, если всѣ коэффиціенты A, B . . . . . M суть цѣлыя числа, отличныя отъ нуля, и всѣ показатели $a, b, c \ldots l$ суть цѣлыя положительныя числа, также отличныя отъ нуля.

Слѣдуя пріему, который мы уже неоднократно формулировали, мы умножимъ лѣвую часть равенства (17) на нѣкотораго множителя N и постараемся разбить каждый членъ на цѣлую и дробную его часть. Самый множитель N мы выберемъ слѣдующимъ образомъ: пусть n означаетъ число членовъ въ лѣвой части равенства (17), не считая свободнаго члена, а p пусть означаетъ произвольное нечетное простое число; затѣмъ положимъ

$$N = \sum_{\alpha, \beta \ldots \lambda = 0, 1, 2, \ldots p} (-1)^{\alpha+\beta+\cdots\lambda} \binom{p}{\alpha}\binom{p}{\beta}\cdots\binom{p}{\lambda} \frac{[(n+1)p - \alpha - \beta \ldots - \lambda - 1]!}{(p-1)!} a^\alpha b^\beta \ldots e^\lambda \qquad (18)$$

суммованіе распространяется на всѣ возможныя слагаемыя означеннаго вида, въ которыхъ показатели $\alpha, \beta \ldots \lambda$ независимо одинъ отъ другого принимаютъ всѣ значенія отъ 0 до p включительно. Прежде всего ясно, что N есть число цѣлое; въ самомъ дѣлѣ, въ каждомъ слагаемомъ какъ число $a^\alpha b^\beta \ldots e^\lambda$, такъ и множители $\binom{p}{\alpha}, \binom{p}{\beta} \ldots \binom{p}{\lambda}$ суть числа цѣлыя; но и послѣдній множитель

$$\frac{[(n+1)p - \alpha - \beta \ldots - \lambda - 1)]!}{(p-1)!}$$

есть число цѣлое, ибо при сдѣланныхъ соглашеніяхъ относительно значеній количествъ $\alpha, \beta \ldots \lambda$

$$(n+1)p - \alpha - \beta - \ldots - \lambda - 1 \geqq p - 1.$$

Выдѣлимъ теперь изъ суммы Σ тотъ членъ, который соот-

вѣтствуетъ значеніямъ показателей $\alpha = \beta = \gamma = \ldots \lambda = p$. Этотъ членъ, очевидно, равенъ

$$(-1)^{np} S^p = (-1)^n S^p, \text{*)}$$

гдѣ S означаетъ произведеніе $abc \ldots l$. Что касается остальныхъ членовъ, то въ каждомъ изъ нихъ имѣется по крайней мѣрѣ одинъ показатель, скажемъ c, меньшій, чѣмъ p; тогда $\binom{p}{c}$ есть число, кратное p, и слѣдовательно, весь членъ представляетъ собой цѣлое число, кратное p; такъ какъ то же самое можно сказать относительно всѣхъ остальныхъ членовъ, то

$$N = (-1)^n S^p + pR \ldots \ldots (19)$$

гдѣ R число цѣлое.

Составимъ теперь выраженіе для $N.e^a$. Для этого намъ нужно помножить рядъ

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots \ldots \frac{a^\sigma}{\sigma!} + \ldots .$$

на выраженіе N.

Какъ извѣстно изъ теоріи рядовъ, чтобы помножить рядъ, состоящій изъ положительныхъ членовъ, на многочленъ, достаточно умножить каждый членъ ряда на всѣ члены многочлена. Мы получимъ при этомъ новый рядъ, который выражаетъ требуемое произведеніе и сходится абсолютно; это значитъ, что суммованіе можно производить, располагая члены ряда въ произвольномъ порядкѣ и соединяя ихъ въ произвольныя группы. Поэтому всѣ члены ряда, выражающаго произведеніе Ne^a, имѣютъ видъ:

$$[h, \beta, \gamma \ldots . \lambda]\; a^h b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda, \qquad (20)$$

гдѣ символъ

$$[h, \beta, \gamma \ldots . \lambda]$$

означаетъ коэффиціентъ того члена, въ которомъ $a, b, c \ldots . l$ входятъ съ показателями $h, \beta, \gamma \ldots \lambda$. При этомъ показатели $\beta, \gamma \ldots, \lambda$ могутъ имѣть всевозможныя значенія отъ 0 до p, показатель же h—отъ 0 до ∞. Поставимъ себѣ теперь задачей разыскать коэффиціентъ $[h, \beta, \gamma \ldots . \lambda]$.

Очевидно членъ (20) могъ получиться только отъ умноженія первыхъ $(h+1)$ членовъ ряда e^a на такіе члены многочлена, выражающаго N, которые содержатъ множитель

$$b^\beta c^\gamma \ldots . l^\lambda.$$

Совокупность этихъ членовъ можетъ быть представлена въ

*) $(-1)^{np} = (-1)^n$, ибо p нечетное число.

такомъ видѣ:

$$(-1)^{\beta+\gamma+\ldots\lambda}\binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\cdots\binom{p}{\lambda}\frac{b^\beta c^\gamma\ldots l^\lambda}{(p-1)!}\Big\{q!-\binom{p}{1}(q-1)!\,a+$$

$$+\binom{p}{2}(q-2)!\,a^2+\ldots+(-1)^p\binom{p}{p}(q-p)!\,a^p\Big\},$$

гдѣ для краткости положено

$$(n+1)p-\beta-\gamma-\ldots\ldots-\lambda-1=q. \qquad (21)$$

Умножая члены ряда e^a на этотъ многочленъ, мы получимъ въ произведенiи членъ, содержащiй $a^h b^\beta\ldots l^\lambda$, въ такомъ видѣ:

$$(-1)^{\beta+\gamma+\ldots+\lambda}\binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\cdots\binom{p}{\lambda}\Big\{\frac{q!}{h!}-\binom{p}{1}\frac{(q-1)!}{(h-1)!}+$$

$$+\binom{p}{2}\frac{(q-2)!}{(h-2)!}+\ldots\Big\}\frac{a^h b^\beta\ldots l^\lambda}{(p-1)!}, \qquad (22)$$

Послѣднiй членъ суммы, содержащейся въ скобкахъ, имѣетъ видъ

$$(-1)^h\binom{p}{h}(q-h)! \text{ или } (-1)^p\binom{p}{p}\frac{(q-p)!}{(h-p)!}, \qquad (22')$$

смотря по тому, будетъ ли $h\leqslant p$ или $h>p$. Выраженiе, содержащееся въ формулѣ (22) въ кривыхъ скобкахъ совпадаетъ съ лѣвыми частями тождествъ I, II, и III, а послѣднiй членъ его (22′) совпадаетъ съ выраженiями (13). Это намъ даетъ возможность преобразовать выраженiе (22) при помощи этихъ тождествъ.

Остановимся сначала на той группѣ членовъ, измѣренiе которыхъ относительно количествъ a, b, . . . l меньше np, т. е. въ которыхъ

$$h+\beta+\gamma+\ldots\ldots\lambda<np. \qquad (23).$$

Эго условiе можно написать въ видѣ:

$$(n+1)p-\beta-\gamma\ldots\ldots-\lambda-1=q\geqslant p+h$$

и потому оно выражаетъ то условiе, при которомъ имѣетъ мѣсто тождество (I). Пользуясь этимъ тождествомъ и замѣняя q его значенiемъ, мы можемъ представить каждый членъ этой группы въ такомъ видѣ:

$$(-1)^{\beta+\gamma+\ldots\lambda}\binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\times\cdots$$

$$\times\binom{p}{\lambda}\binom{np-\beta-\ldots-\lambda-1}{h}\frac{[(n+1)p-h-\beta\ldots-\lambda-1]!}{(p-1)!}a^h b^\beta\ldots l^\lambda.$$

Совокупность членовъ этой группы мы обозначимъ черезъ $G(\bar{a}, b, c \ldots l)$, такъ что

$$G(\bar{a}, b, c \ldots l) =$$

$$\sum (-1)^{\beta+\gamma+\ldots\lambda} \binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\times\ldots$$

$$\times\binom{p}{\lambda}\binom{np-\beta-\gamma-\ldots-\lambda-1}{h}\frac{[(n+1)p-h-\beta\ldots-\lambda-1]!}{(p-1)!}a^h b^\beta \ldots l^\lambda \quad (24).$$

$$\beta, \gamma, \ldots \lambda = 0, 1, \ldots p.$$
$$h+\beta+\gamma+\ldots+\lambda < np.$$

Суммованіе распространяется на всѣ значенія h, $\beta \ldots \lambda$, сумма которыхъ меньше np; при этомъ показатели β, $\gamma \ldots \lambda$ могутъ принимать всевозможныя значенія отъ 0 до p, показатель же h можетъ принимать и большія значенія въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ неравенствомъ (23). Поэтому выраженіе $G(\bar{a}, b, c \ldots l)$ симметрично относительно количествъ группы $b, c, \ldots l$, въ которую, однако, не входитъ количество a. Это мы и имѣли въ виду, помѣчая a горизонтальной чертой сверху.

Теперь не трудно видѣть, что $G(\bar{a}, b, c \ldots l)$ есть цѣлое число, кратное p. Въ самомъ дѣлѣ, каждый членъ этого выраженія представляетъ собой произведеніе цѣлыхъ множителей; сомнѣніе можетъ возникнуть только относительно множителя

$$\frac{[(n+1)p-h-\beta\ldots-\lambda-1]!}{(p-1)!}.$$

Но неравенство (23) обнаруживаетъ, что

$$(n+1)p-h-\beta-\ldots-\lambda-1 > p-1,$$

а потому этотъ множитель представляетъ собой число, не только цѣлое, но даже кратное p, ибо p есть число простое, входитъ въ числитель и не входитъ въ знаменатель. Итакъ

$$G(\bar{a}, b, c \ldots l) = pT_a, \quad (25).$$

гдѣ T_a есть цѣлое число.

Теперь мы обращаемся къ той группѣ членовъ (22), измѣреніе которыхъ опредѣляется неравенствомъ

$$np \leqslant h+\beta+\gamma+\ldots+\lambda < (n+1)p. \quad (26)$$

Такъ какъ сумма

$$\beta+\gamma+\ldots\lambda$$

не превышаетъ $(n-1)p$, а

$$h+\beta+\gamma\ldots+\lambda \geqslant np, \quad (27)$$

то, при этихъ условіяхъ,

$$h \geqslant p. \tag{28}$$

Первая часть неравенства (26), будучи написана въ видѣ

$$(n+1)p-\beta-\gamma-\lambda \leqslant p+h,$$

обнаруживаетъ, что при этихъ условіяхъ

$$p+h>q. \tag{28'}$$

Наконецъ, неравенство

$$h+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\lambda<(n+1)p$$

обнаруживаетъ, что (28″).

$$q \geqslant h$$

Соотношенія (28), (28′) и (28″) обнаруживаютъ, что имѣютъ мѣсто тѣ условія, при которыхъ справедливо тождество (II). Отсюда слѣдуетъ, что члены (22), измѣреніе которыхъ опредѣляется неравенствами (26), обращаются въ нуль.

Намъ остается только разсмотрѣть тѣ члены, въ которыхъ

$$h+\beta+\ldots+\lambda \geqslant (n+1)p. \tag{29}$$

Написавъ это неравенство въ видѣ

$$(n+1)p-\beta\ \ldots-\lambda \leqslant h,$$

мы обнаружимъ, что въ этомъ случаѣ

$$q<h. \tag{30}$$

Далѣе, такъ какъ

$$\beta+\gamma+\ldots\lambda \leqslant (n-1)p,$$

то $q>p$. Вмѣстѣ съ неравенствомъ (30) это обнаруживаетъ, что имѣютъ мѣсто тѣ условія, при которыхъ справедливо тождество (III). Поэтому, пользуясь этимъ тождествомъ, мы представимъ члены послѣдней группы въ видѣ:

$$(-1)^{p+\beta+\gamma+\ldots+\lambda}\binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\cdots\binom{p}{\lambda}\times\ldots$$

$$\times\frac{(h+\beta+\ldots+\lambda-(n+1)p+1)\ldots\ldots(h+\beta+\ldots+\lambda-np)}{h(h-1)\ \ldots\ldots\ (np-\beta-\ldots-\lambda)(p-1)!}a^h b^\beta\ldots l^\lambda.$$

Совокупность всѣхъ членовъ этой группы мы обозначимъ символомъ $R(\bar{a}, b, c\ \ldots\ l)$. Такъ что

$$R(\bar{a}, b, c\ \ldots\ l)= \tag{31}$$

$$\sum(-1)^{p+\beta+\gamma+\ldots+\lambda}\binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\cdots\binom{p}{\lambda}\times\ldots$$

$$\times\frac{(h+\beta+\gamma+\ldots+\lambda-(n+1)p+1)+\ldots(h+\beta+\gamma+\ldots+\lambda-np)}{h(h-1)\ \ldots\ldots\ (np-\beta-\gamma-\ \ldots\ -\lambda)(p-1)!}a^h b^\beta\ldots l^\lambda.$$

$$\beta,\gamma\ldots\lambda=0,1,\ldots p.$$
$$h+\beta+\gamma+\ldots+\lambda \geqslant (n+1)p.$$

Такъ какъ рядъ, которымъ выражается количество R $(\bar{a}, b \ldots l)$, состоитъ изъ положительныхъ и отрицательныхъ членовъ, то абсолютная величина его, которую мы обозначимъ черезъ P, меньше, чѣмъ сумма ряда, составленнаго изъ абсолютныхъ величинъ членовъ предыдущаго ряда. Иными словами

$$P < \sum \binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\times\cdots$$

$$\times\binom{p}{\lambda}\frac{(h+\beta+\gamma+\ldots\lambda-(n+1)p+1)\ldots(h+\beta+\gamma+\ldots\lambda-np)}{h(h-1)\ldots(np-\beta-\gamma-\ldots-\lambda)(p-1)!}a^h b^p\ldots e^\lambda.$$

$$\beta, \gamma \ldots \lambda=0, 1, \ldots p.$$
$$h+\beta+\ldots+\lambda \geqslant (n+1)p.$$

Правая часть этого неравенства возрастетъ еще больше, если всѣ количества a, b, ... l мы замѣнимъ наибольшимъ изъ нихъ, которое обозначимъ черезъ m; поэтому

$$P < \sum \binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\times\cdots$$

$$\times\binom{p}{\lambda}\frac{(h+\beta+\ldots\lambda-(n+1)p+1)\ldots(h+\beta+\ldots\lambda-np)}{h(h-1)\ldots(np-\beta-\gamma\ldots-\lambda)(p-1)!}m^{h+\beta+\cdots+\gamma}. \quad (32)$$

$$\beta, \gamma, \ldots \lambda = 0, 1 \ldots p.$$
$$h+\beta+\ldots+\lambda \geqslant (n+1)p.$$

Какъ указано подъ знакомъ суммы, здѣсь нужно суммировать всѣ члены этого вида, въ которыхъ β, γ ... λ имѣютъ всѣ возможныя значенія отъ 0 до p независимо другъ отъ друга, а при каждой системѣ значеній этихъ количествъ h можетъ принимать всѣ возможныя значенія, при которыхъ

$$h+\beta+\ldots+\lambda \geqslant (n+1)p; \quad (33)$$

порядокъ суммованія, какъ мы имѣли уже случай указать, не вліяетъ на результатъ. Это можно еще выразить такъ. Положимъ

$$\beta+\gamma+\ldots+\lambda=\tau$$
$$h+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=(n+1)p+\sigma. \quad (34)$$

Тогда мы получимъ:

$$h=(n+1)p+\sigma-\tau$$

$$P < \sum \binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\times\cdots$$

$$\times\binom{p}{\lambda}\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)\ m^{(n+1)p+\sigma}}{((n+1)p-\tau+\sigma)((n+1)p-\tau+\sigma-1)\ldots(np-\tau)(p-1)!}.$$

Здѣсь количество h замѣнено количествомъ σ, суммованіе должно быть распространено на всѣ значенія количествъ $\beta, \gamma\ldots\lambda$

отъ 0 до p, условіе же (33) сводится къ тому, чтобы σ принимало произвольныя значенія отъ 0 до ∞. Количество τ зависитъ отъ $\beta, \gamma \ldots \lambda$; вмѣстѣ съ ними оно измѣняется и именно—въ предѣлахъ отъ 0 до $(n-1)p$.

Принимая во вниманіе все сказанное, мы расположимъ суммованіе въ слѣдующемъ порядкѣ: мы дадимъ σ и τ опредѣленныя значенія и просуммируемъ всѣ тѣ члены, въ которыхъ сумма $\beta+\gamma+\ldots\lambda$ имѣетъ предписанное значеніе τ. Полученная сумма будетъ, очевидно, зависѣть отъ σ и отъ τ. Мы ее просуммируемъ сначала по τ въ предѣлахъ отъ 0 до $(n-1)p$, а потомъ по σ въ предѣлахъ отъ нуля до безконечности. Это можно выразить такъ:

$$P < \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \sum_{\tau=0}^{\tau=(n-1)p} \sum_{\beta+\gamma+\ldots\lambda=\tau}^{\beta,\gamma,\ldots\lambda=0,1\ldots p} \binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\times\ldots$$

$$\times\binom{p}{\lambda}\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)\,m^{(n+1)p+\sigma}}{((n+1)p-\tau+\sigma)((n+1)p-\tau+\sigma-1)\ldots(np-\tau)(p-1)!}.$$

При производствѣ перваго суммованія σ и τ сохраняютъ свое значеніе; поэтому первую сумму можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)\,m^{(n+1)p+\sigma}}{((n+1)p-\tau+\sigma)((n+1)p-\tau+\sigma-1)\ldots(np-\tau)(p-1)!}\sum_{\beta+\gamma+\ldots+\lambda=\tau}\binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\cdots\binom{p}{\lambda}$$

Извѣстно, что эта сумма равна $\binom{(n-1)p}{\tau}$. *)

Результатъ перваго суммованія можно, слѣдовательно, вы-

---

*) Это вытекаетъ изъ тождества

$$\underbrace{(1+x)^p\,(1+x)^p\ldots(1+x)^p}_{(n-1)\text{ разъ}} = (1+x)^{(n-1)p}.$$

Это тождество можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=p}\binom{p}{\beta}x^\beta\sum_{\gamma=0}^{\gamma=p}\binom{p}{\gamma}x^\gamma\ldots\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p}\binom{p}{\lambda}x^\lambda = \sum\binom{(n-1)p}{\tau}x^\tau.$$

Коэффиціентъ при x^τ въ лѣвой части равенъ

$$\sum\binom{p}{\beta}\binom{p}{\gamma}\ldots\binom{p}{\lambda},$$

гдѣ суммованіе распространяется на всѣ возможныя слагаемыя, въ которыхъ $\beta+\gamma+\ldots\lambda=\tau$. Поэтому эта сумма равна $\binom{(n-1)p}{\tau}$.

разить такъ:

$$P < \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \sum_{\tau=0}^{\tau=(n-1)p} \binom{(n-1)p}{\tau} \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p) m^{(n+1)p+\sigma}}{((n+1)p-\tau+\sigma)\ldots(np-\tau)(p-1)!}.$$

Приступимъ теперь къ суммованію по τ въ предѣлахъ отъ 0 до $(n-1)p$. Мы имѣемъ при этомъ рядъ слагаемыхъ, представляющихъ собой каждое произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ второй

$$\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p) m^{(n+1)p+\sigma}}{((n+1)p-\tau+\sigma)\ldots(np-\tau)(p-1)!}$$

возрастаетъ вмѣстѣ съ τ. Если мы въ каждомъ слагаемомъ въ этомъ множителѣ замѣнимъ τ его наибольшимъ значеніемъ $(n-1)p$, то сумма возрастаетъ; поэтому искомый результатъ суммованія по τ будетъ меньше, нежели

$$\sum \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p) m^{(n+1)p+\sigma}}{(2p+\sigma)(2p+\sigma-1)\ldots p.(p-1)!} \binom{(n-1)p}{\tau} =$$

$$= \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)}{(2p+\sigma)!} m^{(n+1)p+\sigma} \sum_{\tau=0}^{\tau=(n-1)p} \binom{(n-1)p}{\tau} =$$

$$= \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)}{(2p+\sigma)!} m^{(n+1)p+\sigma} . 2^{(n-1)p}.$$

Итакъ

$$P < \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)}{(2p+\sigma)!} m^{(n+1)p+\sigma} . 2^{(n-1)p}.$$

Но каково бы ни было значеніе σ

$$\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)}{(\sigma+2p)!} =$$

$$= \frac{1}{(\sigma+p)!} \cdot \frac{\sigma+1}{\sigma+1+p} \cdot \frac{\sigma+2}{\sigma+2+p} \cdots \frac{\sigma+p}{\sigma+p+p} < \frac{1}{(\sigma+p)!} < \frac{1}{\sigma!p!}.$$

Слѣдовательно

$$P < \frac{m^{(n+1)p} 2^{(n-1)p}}{p!} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \frac{m^\sigma}{\sigma!}$$

или иначе

$$P < \frac{k^p}{p!} e^m,$$

гдѣ

$$k = 2^{n-1} m^{n+1}.$$

Такъ какъ количество k есть постоянная величина, не зависящая отъ p, то количество $k^p:p!$ стремится къ нулю при неопредѣленномъ возрастанiи p. *)

Этимъ доказано высказанное выше утвержденiе, что, съ увеличенiемъ числа p, количество $R(\overline{a}, b, c \ldots l)$ становится по абсолютной величинѣ меньше любого, сколь угодно малаго числа.

Результатъ всего изслѣдованiя можетъ быть выраженъ такъ:

Если $a, b, c \ldots l$ и α, β, λ суть цѣлыя положительныя числа, отличныя отъ нуля, p простое нечетное число, а N имѣетъ значенiе, опредѣляемое формулой (17), то

$$
\begin{aligned}
N &= S^p + pR \\
Ne^a &= pT_a + R(\overline{a}, b \ldots l) \\
Ne^b &= pT_b + R(a, \overline{b}, \ldots l) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Ne^l &= pT_l + R(a, b, \ldots \overline{l}),
\end{aligned}
\tag{35}
$$

гдѣ

$$S = a . b . c \ldots l,$$

$R, T_a, T_b \ldots T_l$ суть цѣлыя числа, а количества $R(\overline{a}, b \ldots l)$, $R(a, \overline{b} \ldots l) \ldots R(a, b, \ldots \overline{l})$, при достаточно большомъ p, становятся менѣе всякаго заданнаго числа.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$
\begin{aligned}
&N(Ae^a + Be^b + \ldots Le^l + M) = \\
&= p(AT_a + BT_b + \ldots LT_l + MR) + MS^p + \\
&AR(\overline{a}, b, c, \ldots l) + BR(a, \overline{b} \ldots l) + \ldots LR(a, b, c \ldots \overline{l}).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Выберемъ теперь кратное число p настолько большимъ, чтобы, во первыхъ, оно не входило въ составъ произведенiя MS^p, во вторыхъ, чтобы абсолютная величина суммы

$$AR(\overline{a}, b \ldots l) + BR(a, \overline{b} \ldots l) + \ldots + LR(a, b \ldots \overline{l})$$

была меньше 1. (Она можетъ быть сдѣлана менѣе любого задан-

---

*) Это обусловливается тѣмъ, что при достаточно большомъ значенiи p, которое мы обозначимъ черезъ p_1, дробь $\frac{k}{p}$ становится меньше 1. Тогда

$$\frac{k^{p_1+p_2}}{(p_1+p_2)!} < \frac{k^{p_1}}{p_1!} \cdot \left(\frac{k}{p_1}\right)^{p_2},$$

т. е. съ возрастанiемъ p дробь $\frac{k^p}{p!}$, начиная съ p, убываетъ быстрѣе членовъ нисходящей геометрической прогрессiи съ знаменателемъ $\frac{k}{p_1}$.

наго числа). Тогда въ правой части равенства (36) мы будемъ имѣть три группы слагаемыхъ: первую группу составитъ сумма

$$p(AT_a + BT_b + CT_l + \ldots LT_l + MR),$$

это есть цѣлое число, кратное p; вторую группу составляетъ слагаемое MS^p, не равное нулю (такъ какъ M и S отличны отъ нуля) и не кратное p; наконецъ, третью группу составляютъ остальныя слагаемыя, сумма которыхъ составляетъ число, меньшее единицы. Складывая число кратное p съ числомъ некратнымъ p, мы получимъ цѣлое число, не равное нулю; прибавляя къ нему число, меньшее единицы, мы не можемъ получить нуля; поэтому число

$$Ae^a + Be^b + Ce^c + \ldots + Le^l + M$$

не можетъ быть равно нулю. Этимъ доказано формулированное выше предложеніе и обнаружена трансцендентность числа e.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Радіометръ Крукса съ катодными лучами.

Профессора Н. А. Гезехуса въ С.-Петербургѣ.

Въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элем. Математики“ за 1898 г. № 8 была помѣщена замѣтка г. Бархова по поводу наблюденій, произведенныхъ мною и Н. Н. Георгіевскимъ и описанныхъ въ томъ же году и въ томъ же „Вѣстникѣ“; г. Барховъ думаетъ, что замѣченная нами перемѣна направленія вращенія крыльевъ радіометра Крукса могла быть только кажущаяся, обусловленная прерывистостью освѣщенія. Это, разумѣется, въ нѣкоторыхъ случаяхъ могло быть и такъ. Въ нашихъ же опытахъ это было иначе. Недавно, опять вмѣстѣ съ Н. Н. Георгіевскимъ я имѣлъ возможность повторить прежніе опыты, имѣя на этотъ разъ подъ руками два радіометра, повидимому совершенно одинаковые; крылья у нихъ алюминіевыя, покрытыя съ одной стороны слюдяными пластинками. Результаты этихъ опытовъ слѣдующіе:

1) Прежде всего бросилось въ глаза, что оба радіометра, при одной и той же румкорфовой катушкѣ, вращаются въ обратныя стороны; въ одномъ изъ нихъ крылья вращались слюдою впередъ, а въ другомъ, напротивъ, впередъ металлической поверхностью.—Это прямо показываетъ, что катодные лучи въ радіометрахъ играютъ далеко не главную роль; вращеніе зависитъ въ значительной степени и отъ температурныхъ и электростатическихъ вліяній, и косвеннымъ образомъ, слѣдовательно, отъ степени разрѣженія, формы и размѣровъ частей прибора и т. п.

2) Взята была большая индукціонная катушка. Сперва оба радіометра вращались медленно въ тѣ же стороны, какъ и раньше при меньшей румкорфовой спирали. Но при усиленіи тока вра-

щеніе постепенно стало замедляться, наконецъ крылья совсѣмъ остановились, а затѣмъ начали вращаться въ обратныя стороны постепенно все скорѣе и скорѣе. Остаточное вращеніе, послѣ разобщенія радіометра съ индукціонной катушкой, продолжалось нѣсколько минутъ въ ту же сторону, какъ и подъ дѣйствіемъ тока. Если наклоненіемъ радіометра остановить вращеніе крыльевъ, то оно снова возобновляется, когда радіометръ устанавливается прямо, какъ это наблюдалось нами и раньше.

Что перемѣна направленія вращенія во 2-омъ опытѣ, при большой катушкѣ, не была только кажущаяся, какъ это предполагалъ г. Барховъ, было для насъ очевиднымъ, такъ какъ вращеніе было сперва очень медленнымъ и опыты производились при постоянномъ и сильномъ свѣтѣ вольтовой дуги.

Итакъ дѣйствительно радіометръ, независимо отъ дѣйствія катодныхъ лучей, можетъ вращаться и въ ту и въ другую стороны. Очевидно, слѣдовательно, на вращеніе въ радіометрѣ катодные лучи вліяютъ обыкновенно сравнительно слабо, какъ это показалъ, между прочимъ, и *H. Starke* (Ann. der Physik. 1900 г. B. 3. 101).

Остаточное продолжительное вращеніе въ радіометрѣ послѣ прекращенія тока обусловливается навѣрное тѣми же причинами, какъ и другія остаточныя явленія въ разрѣженномъ воздухѣ, напр. свѣченіи (опытъ проф. И. И. Боргмана, показанный имъ въ Физ. Общ. 21 ноября 1900). Объ остаточныхъ дѣйствіяхъ упоминаютъ *Sandrucci* (см. Beibl. 1898. 602) и *Lenard* (Ann. d. Ph. 1900. B. 3. 308).

Упомянутыя причины предстоитъ еще выяснить. Можно думать однако, что они заключаются въ остаточныхъ электрическихъ разрядахъ, какъ объ этомъ было сказано въ первой статьѣ.

Январь 1901.

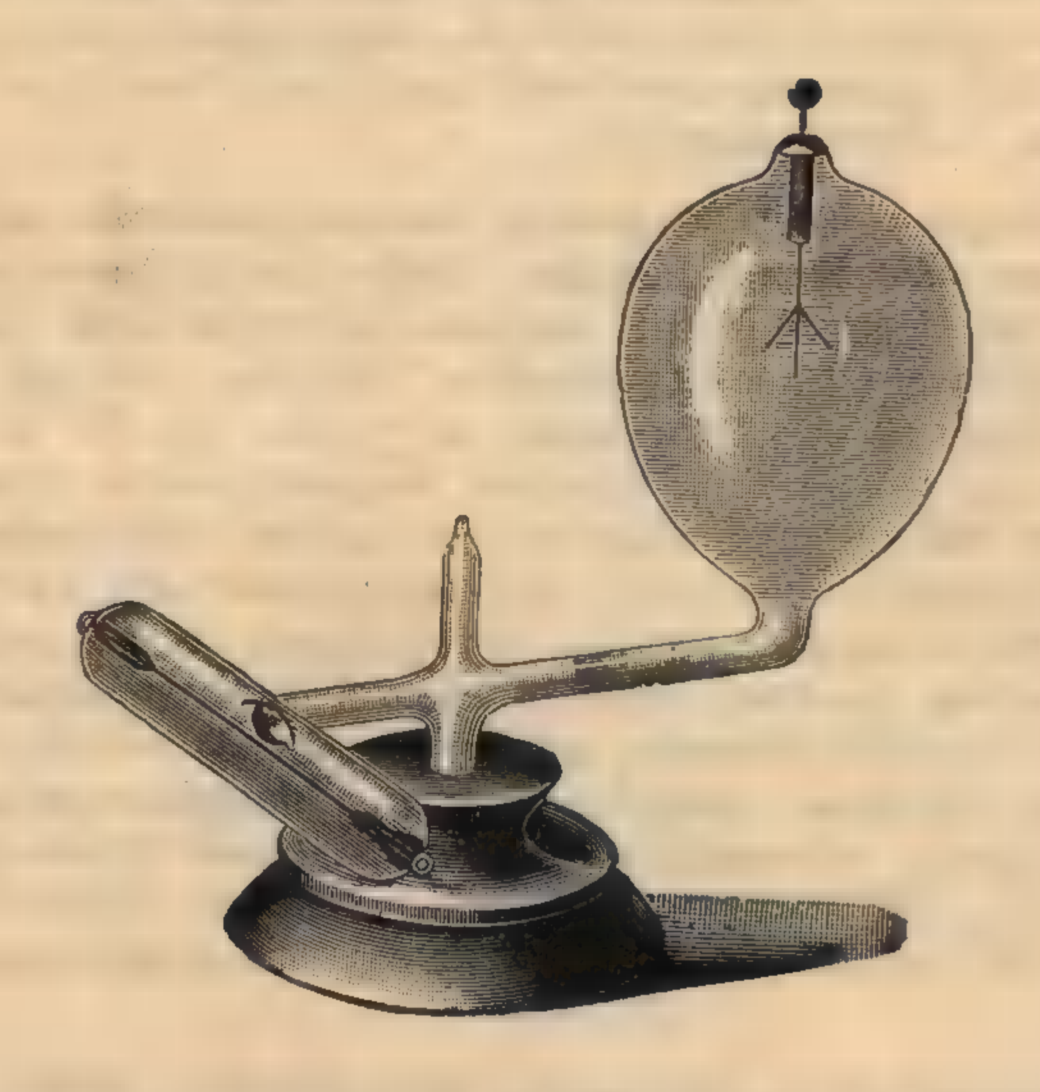
ОПЫТЫ И ПРИБОРЫ.

Нѣсколько опытовъ съ новымъ электроскопомъ.

Г. Э. Пфлаума въ Ригѣ.

Если разрѣдить заключающійся въ электроскопѣ воздухъ, то отталкиванія и притяженія листковъ становятся слабѣе по мѣрѣ приближенія къ нѣкоторому предѣлу разрѣженія; за этимъ предѣломъ они возрастаютъ тѣмъ болѣе, чѣмъ совершеннѣе достигнутая пустота. Это вполнѣ соотвѣтствуетъ давно извѣстному факту, что разрѣженные газы оказываютъ меньшее сопротивленіе теченію электричества, нежели газы нормальной упругости,

но что далѣе нѣкотораго предѣла проводимость ихъ все больше и больше уменьшается. Въ 1883 г. Worthington (см. Phil. Mag. 19, p. 218, 1885) приготовилъ приборъ съ сильно разрѣженнымъ воздухомъ и наблюдалъ, что находящійся въ немъ платиновый шарикъ сильно притягивался платиновою пластинкою,—однако въ моментъ прикосновенія тѣлъ явилась маленькая искра. Это обнаруживаетъ, что степень пустоты въ приборѣ Worthington'а была удалена отъ абсолютной пустоты и даже отъ такъ называемой „непробиваемой" пустоты еще довольно далеко. Нѣсколько совершеннѣе въ этомъ отношеніи ниже описанный приборъ, продаваемый фирмою Müller-Unkel въ Брауншвейгѣ. Онъ состоитъ изъ двухъ соединенныхъ между собою частей: вакуумметра, т. е. цилиндрической трубки съ двумя впаянными въ нее платиновыми проволоками, концы которыхъ отстоятъ другъ отъ друга не далѣе одного миллиметра и собственнаго электроскопа. Послѣдній (см. фигуру) имѣетъ грушевидную форму; листки изъ алюминія дли-



ною въ одинъ сантиментръ и шириною въ 2 миллиметра; они прикрѣплены къ алюминіевой плоской полоскѣ. Остріевъ и острыхъ реберъ нигдѣ нѣтъ, и изоляція всѣхъ проводящихъ частей самая лучшая. Теоретическія слѣдствія, вытекающія изъ опытовъ съ описаннымъ приборомъ, слѣдующія: пустота — совершенный изоляторъ, электростатическія явленія (притягиваніе, отталкиваніе и поляризація) проявляются въ ней особенно явственно и передача электрическаго состоянія черезъ пустоту не сопровождается свѣтовыми явленіями. Хотя цѣна прибора довольно высокая — 35 марокъ, — но все-таки доступная и для кабинетовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Позволимъ себѣ перечислить нѣсколько опытовъ, которые могутъ быть сдѣланы съ нимъ.

1. Чтобы убѣдиться въ томъ, до какой степени разрѣженъ оставшійся въ приборѣ воздухъ, соединяютъ вакуумметръ съ катушкою Румкорфа параллельно искромѣру. При искрахъ длиною до 10 сантиметровъ, т. е. *въ 100 разъ большихъ* разстоянія между электродами вакуумметра, въ приборѣ никакихъ свѣтовыхъ явленій не видно; если же повысить потенціалы разрядовъ далѣе названнаго предѣла, то возникаетъ флюоресценція стекла, свойственная Hittorff'овымъ (Круксовымъ) трубкамъ, значитъ въ этомъ случаѣ разряды уже проходятъ черезъ приборъ. При описанномъ только что опытѣ слѣдуетъ вставить между вакуумметромъ и электроскопомъ металлическій (напр. оловянный) листъ, соединенный съ землею, въ противномъ случаѣ повреждаются листки электроскопа.

2. Приборъ довольно чувствителенъ: поднесенное къ нему наэлектризованное тѣло вызываетъ расхожденіе листковъ уже на разстояніи многихъ дециметровъ; при слабѣйшемъ сотрясеніи стола, на которомъ стоитъ приборъ, листки замѣтно вздрагиваютъ. Благодаря этой чувствительности, приборъ обнаруживаетъ присутствіе весьма слабыхъ зарядовъ.

3. Приборъ можетъ служить для изслѣдованія электричества, возникающаго отъ тренія какихъ либо изоляторовъ или полупроводниковъ объ алюминіевый шарикъ электроскопа. Для этого достаточно провести изслѣдуемымъ тѣломъ слегка по шарику, листки моментально расходятся на уголъ въ 90^0 и больше. Такимъ образомъ можно изслѣдовать больше сотни тѣлъ въ продолженіи одного часа. Оказывается, что алюминій получаетъ положительный зарядъ относительно большинства тѣлъ, какъ то: относительно сѣры, сахара, каучука, гуттаперчи, янтаря, алебастра, колофонія, резины, дерева, воска, гладкой бумаги, мрамора, пробки, целлулоида, отшлифованнаго двойного шпата, сургуча, стеарина, кожи, шелка, бархата, шерсти и т. д. Электроотрицательно алюминіевый шарикъ заряжается отъ пропускной бумаги, стекла, волоса, фарфора, перломутра, щетины, кварца, аррагонита и проч. Аспидъ, кость, мѣлъ и др. не заряжаютъ электроскопа замѣтнымъ образомъ.

4. Обыкновенные общеизвѣстные опыты легко удаются съ приборомъ, если же заряды поднесенныхъ къ прибору тѣлъ не очень слабы, то замѣчается конденсирующее дѣйствіе стеклянной оболочки, чѣмъ въ нѣкоторомъ смыслѣ усложняются явленія. Опишемъ здѣсь нѣсколько изъ такихъ явленій.

Если приблизить издали наэлектризованное тѣло, то листочки сперва отталкиваются, будучи заряжены электричествомъ приближаемаго тѣла, при дальнѣйшемъ же приближеніи тѣла, примѣрно до 20 сантиметровъ и меньше, одноименное электричество переходитъ на стекло и листки заряжаются противоположнымъ электричествомъ. При этомъ на стеклѣ является зарядъ свободнаго электричества, уведеніемъ котораго въ землю можно увеличить

уголъ между листками. При соединеніи съ землею пуговки электроскопа листки или спадаютъ или же заряжаются послѣ разряженія электричествомъ приближеннаго тѣла.

Если приблизить наэлектризованное тѣло къ листкамъ, т. е. снизу, то на большомъ разстояніи можно получить временное расхожденіе листковъ съ разноименнымъ электричествомъ; при меньшемъ разстояніи листки заряжаются одноименно (съ прибл. тѣломъ). И здѣсь, какъ въ предыдущемъ опытѣ, перемѣна знака заряда сопровождается замѣтнымъ вздрагиваніемъ листковъ. Если затѣмъ отвести въ землю шарикъ, то листки расходятся еще сильнѣе, при отведеніи стеклянной оболочки листки или разряжаются или заряжаются противоположнымъ электричествомъ.

Если наэлектризованное тѣло въ продолженіе нѣкотораго времени держать вблизи шарика или листковъ, при чемъ стеклянная оболочка соединена съ землею, то листки *притягиваются* пластинкою, къ которой они прикрѣплены. Изъ этого видно, что листки могутъ принимать зарядъ, противоположный заряду пластинки; можетъ быть они нѣсколько уединены отъ пластинки тѣмъ матеріаломъ, которымъ они къ ней прикрѣплены.

5. Заставляя перескакивать искру на шарикъ, заряжаютъ электроскопъ разноименнымъ электричествомъ, одноименное электричество переходитъ на стекло; обыкновенно же послѣ перескакиванія искры листки расходятся не тотчасъ, а только послѣ отведенія въ землю электричества стеклянной оболочки; если же послѣ перескакиванія искры соединить съ землею шарикъ, то листки отталкиваются одноименнымъ электричествомъ. Заставляя перескакивать искру на стеклянную оболочку, видимъ, что листки пока еще не расходятся, по отведенію же оболочки они отталкиваются разноименнымъ электричествомъ, а по отведенію шарика—одноименнымъ.

6. Если шарикъ соединенъ съ землею и къ нему приближается наэлектризованное тѣло, то листки все-таки расходятся, они отталкиваются разноименнымъ (съ приближаемымъ тѣломъ) зарядомъ. Уголъ между листками увеличивается, если затѣмъ отвести оболочку, но дѣлается равнымъ нулю, если снова отвести шарикъ. Если во время приближенія наэлектризованнаго тѣла, соединена съ землею оболочка, то листки заряжаются одноименно или не расходятся до отведенія пуговки, послѣ чего проявляется одноименный зарядъ.

Если приблизить наэлектризованное тѣло снизу, при чемъ оболочка соединена съ землею, то листки заряжаются одноименно, если послѣ этого снова отвести оболочку, то листки расходятся съ разноименнымъ электричествомъ. По отведенію шарика одноименный зарядъ увеличивается. Если шарикъ отведенъ и наэлектризованное тѣло приближается къ листкамъ снизу, то листки расходятся, принявъ разноименный зарядъ, который увеличивается послѣ отведенія оболочки, но исчезаетъ послѣ отведенія шарика.

7. Описанные только что опыты ясно иллюстрируютъ конденсирующее и наводящее дѣйствiе стеклянной оболочки. Листки, вслѣдствiе своихъ небольшихъ размѣровъ, издали не видны, но такъ какъ стѣнки электроскопа вполнѣ прозрачны, безъ всякаго металлическаго осадка, то для демонстрацiи опытовъ можно пользоваться проекцiоннымъ приборомъ, при чемъ кривизна стеклянной оболочки вовсе не мѣшаетъ.

8. Если вблизи электроскопа вызвать электрическiя колебанiя, то листки начинаютъ сильно вибрировать, при чемъ, если источникомъ колебанiй служитъ индукцiонная катушка или трансформаторъ Tesla, листки мало по малу и независимо отъ перемѣнныхъ зарядовъ принимаютъ постоянный зарядъ. При пользованiи индукцiонною катушкою постоянный зарядъ положителенъ или отрицателенъ, смотря по направленiю прямыхъ токовъ; при употребленiи трансформатора Tesla постоянный зарядъ вблизи полюса (на разстоянiи немногихъ сантиметровъ)—отрицательный, между тѣмъ какъ на большемъ разстоянiи отъ полюса всякiй разъ получается положительный зарядъ электроскопа.

РЕЦЕНЗIИ.

„Теорiя Максвелля и Герцовскiя колебанiя." **А. Пуанкаре**. Переводъ подъ редакцiей *М. А. Шателена и В. К. Лебединскаго.* С.-Петербургъ. 1900. (98 страницъ).

Научныя теорiи очень рѣдко становятся доступными такъ называемой большой публикѣ сейчасъ послѣ своего появленiя на свѣтъ. Должно пройти извѣстное время пока идея, изложенная спецiальнымъ языкомъ, будетъ переведена на общепонятный. Вышесказанное примѣнимо и къ теорiи электромагнитныхъ явленiй Максвелля. До сихъ поръ въ учебникахъ господствуетъ старая теорiя, по которой дiалектрики не играютъ никакой существенной роли въ электрическихъ явленiяхъ. Восполнить этотъ пробѣлъ можетъ-быть поможетъ книжка Пуанкаре. Правда, въ нашей литературѣ есть уже статьи по этому предмету; такъ например, рѣчь Столѣтова, произнесенная имъ на VIII съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ Петербургѣ въ 1890 г. [1]), слѣдовательно, больше 11-ти лѣтъ тому назадъ; при всѣхъ своихъ выдающихся достоинствахъ, рѣчь эта не можетъ помочь орiентироваться въ данномъ вопросѣ, такъ какъ она очень коротка—всего 27 страницъ. Другая статья, посвященная тому же вопросу, на нашъ взглядъ, также мало отвѣчаетъ своему назначенiю; это очеркъ г. Постникова „О природѣ электромагнитныхъ явленiй", напечатанный въ „Сборникѣ статей въ помощь самообразованiю" [2]). Не-

[1]) „Общедоступныя Лекцiи и Рѣчи" Столѣтова. Москва. 1897. Рѣчь: „Эфиръ и Электричество".

[2]) Томъ I. Москва. 1898 г. Стр. 507—528.

чего и говорить, что при такой бѣдности литературы появленіе книжки Пуанкаре, извѣстнаго французскаго физика и математика, на русскомъ языкѣ — въ высшей степени отрадное явленіе. Читатель найдетъ здѣсь вполнѣ элементарное изложеніе теоріи Максвелля и на ряду съ этимъ не мало очень интересныхъ новыхъ фактовъ. Несмотря на совершенное отсутствіе математики, изложеніе, какъ и слѣдовало ожидать, строго научное. Авторъ предполагаетъ знаніе физики въ размѣрѣ нѣсколько бо́льшемъ, чѣмъ курсъ нашихъ гимназій. Такъ, явленія диффракціи и поляризаціи предполагаются извѣстными. Принимая во вниманіе этотъ фактъ, можно только пожалѣть, что авторъ совершенно отказался отъ помощи математики: читатель, знакомый съ упомянутыми явленіями, владѣетъ minimum элементарной математикой. Также чувствуется недостатокъ въ чертежахъ, во всей книжкѣ ихъ всего пять.

Относительно русскаго перевода нельзя, къ сожалѣнію, сказать ничего утѣшительнаго. Онъ сдѣланъ такимъ тяжелымъ языкомъ, что часто приходится задумываться надъ конструкціей фразы. Мѣстами встрѣчаются и недосмотры (объ опечаткахъ, понятно, и говорить нечего), какъ напр.: на стран. 56 (строка 16 снизу) вмѣсто „самое" напечатано „саму", на стран. 96 (строка 1 сверху) вмѣсто „сразу"—„заразъ" и т. п. Кромѣ того, на нашъ взглядъ, французское слово „projecteur" слѣдуетъ перевести словомъ „проекторъ", а не „прожекторъ" (стран. 65, строка 1 сверху); вѣдь мы не говоримъ „прожектъ", „прожекція", а—„проектъ", „проекція". Также мы находимъ неудобнымъ передавать иностранныя имена русскими буквами; одно и то же имя de la Rive переводчикъ передаетъ, въ различныхъ мѣстахъ книги, различно: де ла Ривъ и де Ларивъ. *)

Д. Шоръ (Геттингенъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Телефонографъ. Телефоны, употреблявшіеся до недавняго времени, страдали, какъ извѣстно, тѣмъ существеннымъ недостаткомъ, что на значительныхъ разстояніяхъ (свыше 1000 километровъ) передаваемая рѣчь становилась неясной и непонятной, вслѣдствіе слабости звука. Но благодаря изобрѣтенію новаго микрофона, явилась возможность не только разговаривать на громадныхъ разстояніяхъ (телефономъ соединены теперь Берлинъ—Парижъ—Бордо), но и фиксировать передаваемую рѣчь на валикахъ фонографа, благодаря значительной силѣ звука.

Въ послѣднее время сдѣлано не мало остроумныхъ попытокъ связать телефонъ и фонографъ;—другими словами, изобрѣтатели старались придумать приборъ, который могъ бы быть названъ *телефонографомъ* или *телеграфономъ*.

*) Редакція не раздѣляетъ мнѣнія рецензента, что иностранныя фамиліи *неудобно* печатать русскими буквами; но принявши опредѣленное русское начертаніе, слѣдуетъ его, конечно, держаться.

Связать телефонъ или фонографъ съ пишущей машиной такъ, чтобы рѣчь записывалась на бумагѣ съ такой же скоростью, съ какой опа произносится, и по сей день остается неразрѣшимой задачей, несмотря на всѣ усилія изобрѣталелей съ Эдиссономъ во главѣ.

Всеобщее вниманіе обратило на себя открытіе, сдѣланное датскимъ инженеромъ Waldemar'омъ Poulsen'омъ, которое, какъ полагаютъ спеціалисты, далеко подвинуло впередъ рѣшеніе вышеизложенной задачи. Открытіе это, сверхъ того, должно внести очень многое въ такъ называемую „технику слабыхъ токовъ" (Schwachstrom-Technik). Основная идея этого открытія относится къ ученію о магнитизмѣ.

Если мы станемъ натирать постояннымъ магнитомъ желѣзную или стальную пластинку, въ которой находится нѣкоторое количество остаточнаго магнитизма, то въ тѣхъ мѣстахъ, въ которыхъ мы касались магнитомъ, сила остаточного магнитизма будетъ измѣняться. Это не трудно провѣрить на опытѣ. Если мы покроемъ пластинку равномѣрнымъ слоемъ желѣзныхъ опилокъ, то послѣ натиранія магнитомъ слой опилокъ измѣнится въ тѣхъ мѣстахъ, которыя были натерты магнитомъ. Вызванное такимъ образомъ измѣненіе толщины слоя опилокъ останется до тѣхъ поръ, пока какая-либо внѣшняя причина, напр., новое натираніе, не измѣнитъ распредѣленія магнитизма въ пластинкѣ и тѣмъ самымъ расположенія опилокъ на ней.

Инженеръ Poulsen, напалъ на мысль воспользоваться этимъ для телефонографа. Телефонъ заканчивается, какъ извѣстно, электромагнитомъ, отражающимъ звуковыя колебанія. Представимъ себѣ стальную проволоку, передвигающуюся между полюсами электромагнита, въ то время какъ телефонъ находится въ дѣйствіи. Наводящее дѣйствіе электромагнита измѣняетъ распредѣленіе магнитизма въ проволокѣ, усиливая его въ однихъ мѣстахъ и ослабляя въ другихъ, смотря по тѣмъ колебаніямъ, которыя онъ самъ испытываетъ. Проволока сохраняетъ такимъ образомъ — если можно такъ выразиться —магнитную запись человѣческой рѣчи. Если затѣмъ съ тою же скоростью проводить эту проволоку между полюсами электромагнита, то она будетъ вызывать въ его обмоткѣ токъ, напряженіе котораго будетъ колебаться въ зависимости отъ мѣняющаго напряженія тока въ различныхъ частяхъ проволоки. Электромагнитъ будетъ отражать магнитную запись, которую несетъ проволока, а его якорь вновь вызывать тѣ звуковыя колебанія, которыми эта запись была произведена. Къ этому нужно прибавить, что проволока сохраняетъ эту запись до тѣхъ поръ, пока въ ней будетъ возстановлено равномѣрное распредѣленіе магнитизма какой либо внѣшней силой; проще всего это достигается тѣмъ, что чрезъ нее пропускаютъ токъ отъ сухой батареи.

На приборѣ Поульсена длинная проволока толщиною въ 1^{mm} наматывается съ небольшими промежутками на мѣдный барабанъ, который можетъ быть приведенъ въ быстрое вращеніе.

Въ то время, когда говорятъ въ микрофонъ, проволока, скользящая мимо катушекъ телефона, намагничивается въ различныхъ своихъ частяхъ различнымъ образомъ, благодаря индукціоннымъ токамъ катушекъ; и на проволокѣ какъ бы образуются магнитныя возвышенности и впадины.

Значеніе такого приспособленія при телефонѣ можетъ быть очень велико. Владѣльца телефона можетъ не быть, когда говорятъ въ его телефонъ; но стальной прутъ запишетъ все, что было сказано, и по возвращеніи хозяина передастъ ему все, что нужно.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Премія Нобеля. Какъ нашимъ читателямъ извѣстно, покойный шведскій инженеръ *Dr. Alfr. Bernh. Nobel* завѣщалъ свое громадное состояніе для учрежденія премій. Его состояніе должно было быть реализовано, и съ процентовъ полученнаго капитала ежегодно выдаваться 5 премій: 1) за лучшую работу по физикѣ; 2) за лучшую работу по химіи; 3) за лучшую работу по физіологіи или медицинѣ; 4) за самое выдающееся „въ идеальномъ отношеніи" литературное произведеніе; и 5) за наиболѣе продуктивную дѣятельность съ цѣлью достиженія всеобщаго мира. — До сихъ поръ воля покойнаго не была выполнена вслѣдствіе многочисленныхъ препятствій и трудностей, изъ которыхъ главная была реализація имущества. Въ настоящее время работы по этому дѣлу приведены въ порядокъ въ такой мѣрѣ, что мы можемъ сообщить нашимъ читателямъ нѣкоторыя небезъинтересныя подробности. Присужденіемъ первыхъ двухъ премій (физика и химія) завѣдуетъ „Королевская Академія для Естественныхъ Наукъ" въ Стокгольмѣ. Для испытанія работъ выбираются изъ среды ея членовъ два комитета.—1) Для физики комитетъ состоитъ въ настоящее время изъ слѣдующихъ членовъ: *Dr. K. B. Hasselberg*, профессоръ физики и астрономіи въ Стокгольмѣ (предсѣдатель); *Dr. T. R. Thalen*, заслуженный профессоръ физики и механики въ Упсалѣ; *Dr. H. H. Hildebrandsson*, экстраординарный профессоръ метеорологіи въ Упсалѣ; *Dr. K. J. Angström*, профессоръ физики въ Упсалѣ; *Dr. S. A. Arrhenius*, профессоръ физики въ Стокгольмскомъ политехникумѣ. — 2). Для химіи: *Dr. P. Th. Cleve*. профессоръ химіи въ Упсалѣ (предсѣдатель); *Dr. J. P. Klason*, профессоръ въ Стокгольмскомъ политехникумѣ; профессоръ *Dr. H. G. Söderbaum*, директоръ агрономическаго отдѣленія Стокгольмской земледѣльческой академіи; *Dr. S. O. Pettersson*, профессоръ химіи въ Стокгольмскомъ политехникумѣ; *Dr. K. O. Widman*, экстраординарный профессоръ химіи въ Упсалѣ.

Премія будетъ выдаваться за работу (открытіе, изобрѣтеніе или сочиненіе), на которую укажетъ комитету одно изъ имѣющихъ на то право лицъ и которую комитетъ сочтетъ достойной

преміи. Правомъ предлагать кандидатовъ обладаютъ слѣдующія лица (мы, конечно, говоримъ только о физикѣ и химіи):

1. Всѣ члены Стокгольмской „Академіи для Естественныхъ Наукъ“. 2. Члены вышеназванныхъ двухъ комитетовъ. 3. Тѣ изслѣдователи, которые получили отъ „Академіи для Естественныхъ Наукъ“ Нобелевскую премію. 4. Ординарные и экстраординарные профессора физики и химіи университетовъ въ Упсалѣ, Лундѣ, Христіаніи, Копенгагенѣ и Гельсингфорсѣ; Стокгольмской Медицинской Академіи и Королевскаго Политехникума. 5. Лица, занимающія каѳедры физики и химіи въ тѣхъ иностранныхъ университетахъ и политехникумахъ, которые ежегодно будутъ избираться „Академіей Естественныхъ Наукъ“ въ Стокгольмѣ. На 1901 годъ послѣдняя избрала университеты: *Берлинскій, Вѣнскій, Парижскій, Лондонскій, С.-Петербургскій, Римскій, Лейденскій, Чикагскій* и кромѣ того *Цюрихскій политехникумъ*. 6. Всѣ другіе ученые, которымъ „Академія для Естественныхъ Наукъ“ найдетъ цѣлесообразнымъ дать это право.

Премія будетъ выдаваться безъ различія національности за работу (открытіе, изобрѣтеніе или сочиненіе), давшую *новѣйшіе результаты*. Но и болѣе старыя работы могутъ быть приняты во вниманіе, если онѣ получили *значеніе только въ послѣднее время*. Работа умершаго можетъ быть премирована только въ томъ случаѣ, если его кандидатура была поставлена до его смерти. „Академія Естественныхъ Наукъ“ можетъ, если найдетъ цѣлесообразнымъ, присудить премію не отдѣльному лицу, а цѣлому учрежденію.

Ежегодно въ день смерти Нобеля (10-го декабря [1]) будетъ происходить торжественное засѣданіе „Академіи“, на которомъ будетъ возвѣщаться имя получившаго премію и всѣхъ кандидатовъ. Кромѣ денежной суммы премія содержитъ еще дипломъ и золотую медаль съ портретомъ Нобеля и соотвѣтствующею надписью. Получившій премію обязанъ прочесть въ Стокгольмѣ публичный докладъ въ дополненіе къ премированной работѣ не позже, чѣмъ черезъ полъ-года послѣ 10-го декабря. Каждая изъ выдаваемыхъ премій должна быть не менѣе трехъ пятыхъ ежегоднаго дохода съ суммы, которою располагаетъ для этой цѣли „Академія“, и можетъ быть раздѣлена, въ крайнемъ случаѣ, на три части [2]). Если работа принадлежитъ нѣсколькимъ лицамъ, то сумма выдается имъ вмѣстѣ.—Если „Академія“ не найдетъ достойной преміи работы, то сумма, предназначавшаяся для преміи, присовокупляется къ основному капиталу; если то же повторится еще разъ, то изъ этой суммы образуютъ отдѣльный фондъ для поддержки ученыхъ, уже оказавшихъ наукѣ пользу. Но, по меньшей мѣрѣ, *одинъ разъ въ пять лѣтъ премія должна быть присуждена*.

---

[1]) Въ первый разъ въ настоящемъ, 1901, году.

[2]) Реализація имущества Нобеля еще не вполнѣ закончена; несмотря на это, *каждая отдѣльная премія* опредѣляется теперь, въ 1901 году, приблизительно въ 200.000 марокъ т. е. около 100.000 рублей.

Для помощи вышеупомянутымъ Нобелевскимъ комитетамъ „Академіи для Естественныхъ Наукъ", при послѣдней учреждены особые институты, въ которыхъ могутъ занимать должности лица различныхъ національностей, равно какъ и женщины. „Нобелевскій Институтъ Академіи для Естественныхъ Наукъ" еще только строится; въ этомъ учрежденіи будутъ провѣряться и изучаться тѣ работы, которыя будутъ предложены, какъ достойныя преміи, однимъ изъ имѣющихъ на то право лицъ (см. выше). Въ спеціально для этой цѣли построенномъ зданіи будутъ находиться двѣ лабораторіи — физическая и химическая, залъ для засѣданій обоихъ вышеупомянутыхъ комитетовъ, библіотека и архивъ. Для устройства этого института отпущено пока 340.000 марокъ, а затѣмъ будетъ ежегодно выдаваться приблизительно четверть дохода съ капитала, имѣющагося въ распоряженіи „Академіи." Кромѣ того $^1/_{10}$ этого дохода будетъ ежегодно присовокупляться къ основному капиталу.

Управленіе всего „Нобелевскаго Учрежденія" сосредоточивается въ настоящее время въ рукахъ слѣдующихъ пяти лицъ: 1) Бывшій шведскій министръ-президентъ *E. G. Boström* (предсѣдатель); юристъ *H. Santenon* (управляющій); инженеръ *R. Sahlman*; историкъ и бывшій министръ финансовъ *Dr. H. L. Forssell;* депутатъ рейхстага и повѣренный государственнаго банка *Dr. H. R. Törebladh.* Секретаремъ управленія назначенъ юристъ баронъ *K. F. v. Otter.*

Въ этомъ году будутъ обсуждаться работы, предложенныя не позже 12 февраля кѣмъ либо изъ лицъ, имѣющихъ на то право.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

№ 7 (4 сер.). Даны три прямыя. Провести въ данномъ направленіи сѣкущую, встрѣчающую эти прямыя въ трехъ точкахъ x, y, z, такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство:

$$\overline{xy}^2 = xz \, . \, yz.$$

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 8 (4 сер.). Какой изъ треугольниковъ, вписанныхъ въ данный круговой секторъ, меньшій четверти окружности, и имѣющихъ одну изъ вершинъ въ данной точкѣ M дуги сектора, имѣетъ наименьшій периметръ? Доказать, что периметръ искомаго треугольника не зависитъ отъ положенія точки M на дугѣ даннаго сектора.

Я. Полушкинъ (Знаменка).

№ 9 (4 сер.). Доказать, что числа вида $3n-1$, $5n+2$, $5n-2$, $7n+3$, $7n-1$, $7n-2$, гдѣ n число цѣлое, не могутъ быть точными квадратами.

В. Раздарскій (Владикавказъ).

№ 10 (4 сер.). Сколько литровъ водяного пара при температурѣ 100° и давленіи 76 см. надо сгустить въ 2 куб. метрахъ воды, чтобы повысить температуру этой воды съ 20° до 80°? Плотность водяного пара $\frac{5}{8}$; скрытая теплота его испаренія при 100° равна 537.

М. Гербановскій (Владиміръ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 587 (3 сер.). *Построить треугольникъ, когда даны: основаніе, точка касанія его съ окружностью, вписанной въ искомый треугольникъ, и уголъ при вершинѣ.*

Пусть ABC искомый треугольникъ, α, β, γ — соотвѣтственныя точки прикосновенія сторонъ BC, CA, AB съ вписанной окружностью, BC, $\angle A$ и α—данныя основаніе, уголъ и точка прикосновенія. Такъ какъ

$$A\beta = A\gamma,\ B\gamma = B\alpha,\ C\alpha = C\beta, \text{ то}$$

$$AB - AC = A\gamma + B\gamma - A\beta - C\beta = B\alpha - C\alpha.$$

Такимъ образомъ вопросъ приводится къ рѣшенію извѣстной задачи: по основанію, углу при вершинѣ и разности двухъ другихъ сторонъ построить треугольникъ. На данной сторонѣ BC строимъ сегментъ, вмѣщающій уголъ A, и второй сегментъ, вмѣщающій уголъ $\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ и лежащій внутри перваго сегмента. Изъ точки B на дугѣ второго сегмента въ точкѣ M дѣлаемъ засѣчку радіусомъ $B\alpha - C\alpha$ (полагая $B\alpha > C\alpha$); прямая BM встрѣтитъ первый сегментъ въ точкѣ A, и треугольникъ ABC есть искомый.

А. Я. (Екатеринбургъ); *П. Давидсонъ* (Житоміръ).

№ 607 (3 сер.). *Черезъ данную точку даннымъ радіусомъ провести окружность, встрѣчающую двѣ данныя параллельныя прямыя по хордѣ данной длины.*

Пусть M—данная точка, L и L'—данныя параллельныя прямыя. Предположимъ, что задача рѣшена; пусть O—центръ искомой окружности, AB—данная по длинѣ хорда окружности O, содержащаяся между параллельными прямыми, причемъ точка A предполагается лежащей на прямой L.

Черезъ произвольную точку A' прямой L проведемъ прямую, параллельную прямой AB до пересѣченія ея въ точкѣ B' съ прямой L' (точка B' есть также одна изъ точекъ пересѣченія съ прямой L' окружности, описанной изъ точки A', какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ данной длинѣ хорды). Въ срединѣ отрѣзка $A'B'$ проводимъ къ нему перпендикуляръ и на немъ дѣлаемъ изъ точки A' радіусомъ AO засѣчку въ точкѣ O' такъ, чтобы расположеніе точекъ A, B, O и точекъ $A'B'O'$ было соотвѣтственное. Затѣмъ изъ точки O' радіусомъ $O'A'$ описываемъ окружность, которая пройдетъ и черезъ точку B'. Треугольники ABO и $A'B'O'$ равны по тремъ сторонамъ; слѣдовательно $\angle B'A'O' = \angle BAO$, откуда, въ виду вышеуказаннаго замѣчанія о положеніи точки O', вытекаетъ равенство и соотвѣтственное положеніе угловъ, образуемыхъ прямой L съ прямыми AO и $A'O'$, а слѣдовательно и параллельность *равныхъ* отрѣзковъ OA и $O'A'$. Поэтому прямыя OO', L и L' параллельны. Проведя черезъ точки O' и M прямыя, параллельныя соотвѣтственно прямымъ OM и OO', получимъ параллелограммъ $O'M'MO$, а слѣдовательно $O'M' = OM = O'A'$, такъ что точка M' лежитъ на окружности O'. Итакъ радіусъ OM искомой окружности параллеленъ прямой, соединяющей центръ O' съ одной изъ точекъ пересѣченія окружности O' и прямой, проходящей черезъ точку M и параллельной прямой L.

Отсюда вытекаетъ построеніе при помощи метода параллельнаго перенесенія. Изъ произвольной точки A' прямой L' дѣлаемъ засѣчку въ точкѣ B' на прямой L радіусомъ, равнымъ данной длинѣ хорды. Строимъ (см. анализъ задачи) точку O' или симметричную ей относительно прямой $A'B'$ точку O''. Изъ точки O' описываемъ даннымъ радіусомъ окружность и находимъ точки пересѣченія ея M' и M'' съ прямой MX, проходящей черезъ точку M и параллельной прямой L, затѣмъ черезъ точку M проводимъ прямыя, параллельныя радіусамъ $O'M'$ и $O'M''$, до пересѣченія ихъ съ прямою

$O'Q$, параллельной прямой L, въ точкахъ O и O_1 *); каждая изъ этихъ точекъ есть центръ окружности, удовлетворяющей условію задачи; доказать это предоставляемъ читателю. Окружность O'' даетъ вообще еще два рѣшенія.

Выбравъ точку A' произвольно на прямой L, можно хордѣ $A'B'$ вообще дать два положенія, что безразлично для числа рѣшеній, такъ какъ оба положенія даютъ одну и ту же прямую $O'Q$ и тѣ же направленія радіусовъ $O'M'$ и $O'M''$.

В. Толстовъ (Тамбовъ); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *В. Шлыгинъ* (Урюпино); *И. Кудинъ* (Москва).

№ 613 (3 сер.). *Черезъ данную точку провести окружность, встрѣчающую данныя три параллельныя прямыя по двумъ хордамъ данной длины.*

Пусть L, L', L''—данныя параллельныя прямыя, a и b—данныя длины хордъ, содержащіяся соотвѣтственно между прямыми L, L' и L', L''. Задача рѣшается, подобно № 607 (3 сер.) методомъ параллельнаго перенесенія. Предоставляя анализъ задачи читателю, приводимъ ея синтезъ вмѣстѣ съ доказательствомъ. Изъ произвольной точки A прямой L дѣлаемъ радіусомъ a засѣчку на прямой L' въ точкѣ B, а изъ точки B радіусомъ b—засѣчку на L'' въ точкѣ C. Черезъ точки A, B, C (если это возможно) проводимъ окружность; пусть O' ея центръ. Черезъ точки M и O' проводимъ прямыя MP и $O'Q$, параллельныя прямой L. Пусть M' и M'' суть точки пересѣченія окружности O' съ прямой MP; тогда, проведя черезъ точку M двѣ прямыя, параллельныя соотвѣтственно прямымъ $O'M'$ и $O'M''$, получимъ соотвѣтственныя точки пересѣченія O и O_1 *) этихъ прямыхъ съ прямой $O'O$. Окружности, описанныя изъ центровъ O и O_1 радіусами $OM=O_1M$, удовлетворяютъ условію задачи. Дѣйствительно, эти окружности имѣютъ данный радіусъ; кромѣ того, если изъ центра O проведемъ прямыя OX, OY и OZ, соотвѣтственно параллельныя прямымъ $O'A'$, $A'B'$ и $O'C$, и назовемъ соотвѣтственныя точки встрѣчи прямыхъ OX, OY и OZ съ прямыми L, L' и L'' черезъ A, B и C, то изъ полученныхъ при этомъ построеніи параллелограммовъ найдемъ, что $OA=O'A'=OB=O'B'=OC=O'C'$, т. е. точки A, B, C лежатъ на окружности O. Кромѣ того отрѣзки AA' и BB' равны и параллельны отрѣзку OO', откуда слѣдуетъ, что $AB=A'B'$. Точно также убѣдимся, что $BC=B'C'$. Различный выборъ засѣчекъ B' и C' даетъ четыре комбинаціи, а каждому положенію треугольника $A'B'C'$ отвѣчаютъ по предыдущему два рѣшенія. Но рѣшеній вообще 4, а не 8, такъ какъ два положенія треугольника $A'B'C'$, симметричныя относительно перпендикуляра къ L, даютъ ту же прямую $O'Q$ и тѣ же направленія радіусовъ $O'M'$ и $O'M''$; доказать это предоставляемъ читателю.

В. Толстовъ (Тамбовъ); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *В. Шлыгинъ* (Урюпино).

№ 601 (3 сер.). *Найти ариѳметическую прогрессію, въ которой средняя ариѳметическая всякихъ n первыхъ членовъ равна числу этихъ членовъ.*

Обозначая n-й членъ прогрессіи черезъ u_n, а сумму n первыхъ членовъ черезъ S_n, имѣемъ:

$$\frac{S_n}{n}=n, \qquad (1)$$

откуда

$$S_n=n^2,\ S_{n-1}=(n-1)^2,\ u_n=S_n-S_{n-1}=2n-1.$$

Искомая прогрессія можетъ оказаться лишь рядомъ нечетныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7 . . . , который дѣйствительно удовлетворяетъ равенству (1).

В. Толстовъ (Тамбовъ); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *В. Шлыгинъ* (Урюпино); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *Ѳ. Дмитріевъ* (Новочеркасскъ); *П. Давидсонъ* (Житоміръ).

---

*) Такое построеніе удобнѣе для доказательства; конечно, точки O и O_1 можно найти проще, сдѣлавъ изъ M засѣчку на прямой $O'Q$ даннымъ радіусомъ.

*) См. примѣчаніе къ рѣшенію задачи № 607.

№ 602 (3 сер.). *Построить прямоугольный треугольникъ, зная медіаны одного изъ катетовъ m_a и гипотенузы m_c.*

Пусть ABC есть искомый треугольникъ съ прямымъ угломъ C; пусть $CD = m_c$ и $AE = m_a$ суть данныя медіаны, O—точка ихъ пересѣченія. Тогда

$$AO = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} m_a, \quad OD = \frac{1}{3} CD = \frac{1}{3} m_c, \quad AD = DB = CD = m_c.$$

Такимъ образомъ въ треугольникѣ AOD извѣстны его стороны. Отсюда вытекаетъ построеніе: строимъ треугольникъ AOD по тремъ сторонамъ, описываемъ изъ точки D, какъ изъ центра, окружность радіусомъ $DA = m_c$ и продолжаемъ сторону OD до пересѣченія съ этой окружностью въ точкѣ C; треугольникъ ACB есть искомый.

В. Толстовъ (Тамбовъ); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *В. Шлыгинъ* (Урюпино); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *Ѳ. Дмитріевъ* (Новочеркасскъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 603 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$(1+x)^7 + (1-x)^7 = 128.$$

Перенеся 128 въ первую часть уравненія, раскрывъ скобки, сдѣлавъ приведеніе и раздѣливъ обѣ части уравненія на 7, находимъ:

$$x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 9 = 0,$$

или

$$(x^6 - x^4) + (6x^4 - 6x^2) + (9x^2 - 9) = (x^2-1)(x^4+6x^2+9) = (x^2-1)(x^2+3)^2 = 0.$$

Слѣдовательно, или $x^2-1=0$ или $x^2+3=0$, откуда

$$x_1 = 1, \; x_2 = -1, \; x_3 = i\sqrt{3}, \; x_4 = -i\sqrt{3}.$$

В. Толстовъ (Тамбовъ); *П. Кунда* (Гродно); *Ѳ. Дмитріевъ* (Новочеркасскъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *П. Давидсонъ* (Житоміръ).

№ 611 (3 сер.) *Опредѣлить площадь трапеціи по четыремъ ея сторонамъ.*

Пусть a, b—длины параллельныхъ, c и d—длины непараллельныхъ сторонъ трапеціи, h—ея высота. Если черезъ конецъ одной изъ непараллельныхъ сторонъ проведемъ прямую, параллельную другой непараллельной сторонѣ, то получимъ треугольникъ со сторонами, равными c, d и $a-b$ (полагая $a > b$), высота котораго, если принять за основаніе сторону $a - b$, равна h Поэтому

$$\frac{(a-b)h}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a-b+c-d)(a-b+d-c)},$$

откуда

$$h = \frac{1}{2(a-b)} \cdot \sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a-b+c-d)(a-b+d-c)}.$$

Слѣдовательно площадь трапеціи равна

$$\frac{a+b}{4(a-b)} \cdot \sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a-b+c-d)(a-b+d-c)}.$$

Л. Гальперинъ (Бердичевъ); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *В. Шлыгинъ* (Урюпино).

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 6-го февраля 1901 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.